

auftreten [vgl. z. B. CHOU²³, S. 429, Gl. (3)], wenn man bei der Umrechnung die spezielle Symmetrie des (reziproken) HOOKESchen Tensors für kubische bzw. hexagonale Kristalle (vgl. z. B. NYE¹⁰, S. 300/301) in der Spannungs-Dehnungs-Beziehung berücksichtigt. Überdies wird noch $\varepsilon_{33} = 0$ (ebener Verzerrungszustand), was z. B. aus der speziellen Gestalt von σ_{33} direkt folgt [vgl. z. B. wieder CHOU²³, S. 429, Gl. (3)]. Bezüglich der restlichen Verzerrungskomponenten sieht man nun aber sofort, daß bei den kubischen Kristallen nach Gl. (3,3) allein $\varepsilon_{12} = \varepsilon_{21}$, bei den hexagonalen nach

Gl. (3,5) allein ε_{11} und ε_{22} mit piezoelektrischen Konstanten verknüpft sind (die gestrichenen piezoelektrischen Konstanten sind natürlich hier mit den ungestrichenen identisch). Diese piezoelektrischen Konstanten besitzen aber alle die Ziffer 3 als ersten Index, d. h. die zugehörigen Verzerrungskomponenten werden bei der Bildung von q' [nach Gl. (2,2)] nach der Koordinate $z = x_3$ abgeleitet, von der sie gar nicht abhängen. Also bleibt $q' \equiv 0$ und damit $V \equiv 0$, womit die Behauptung bereits bewiesen ist.

Einfluß der spontanen Emission auf das Einschwingverhalten von Lasern*

Von DIETER RÖSS

Mitteilung aus dem Zentral-Laboratorium der Siemens & Halske AG- München

(Z. Naturforsch. **19 a**, 1169—1177 [1964] ; eingegangen am 26. Juni 1964)

In ausgesprochenen Multimode-Lasern ist die spontane Emission pro Mode gegenüber der stimulierten Emission nicht vernachlässigbar klein. Der zusätzliche Inversionsabbau durch verstärkte spontane Emission führt zu einem gegenüber dem Einmoden-Laser veränderten Einschwingverhalten. Mit wachsender Modenzahl wird die Relaxationsschwingung zunehmend gedämpft. Je nach der Modenzahl kann die Dämpfung mit wachsender Pumpleistung oder Resonatorgüte zu- oder abnehmen. Das Einschwingverhalten kann durch eine einfache Modifikation der bekannten Bilanzgleichungen beschrieben werden. Wir geben numerische Lösungen und Näherungsgleichungen an.

Die Ergebnisse der Rechnung werden durch Beobachtungen an Rubin-Multimode-Lasern in Form von totalreflektierenden Ringen bestätigt. Bei niedriger Pumprate ist der Einfluß der spontanen Emission auf das Einschwingverhalten auch in Einmode-Lasern nicht zu vernachlässigen. Hier beobachtet man eine verkürzte Dämpfungszeit in der Nähe der Schwellenergie.

I. Problemstellung

Die Abmessungen optischer Resonatoren für Laser-Oszillatoren sind im allgemeinen groß gegen die Wellenlänge der erregten Schwingungen. In ihrem Volumen sind daher viele Moden gleichzeitig existenzfähig. In den gebräuchlichen Resonatoren vom FABRY-PÉROT-Typ mit ebenen¹ oder gekrümmten² Spiegeln wird eine Modenselektion dadurch erreicht, daß die Reflexions- und Beugungsverluste verschiedener Moden unterschiedlich groß sind. Entgegen der ursprünglichen Erwartung³ hat sich jedoch gezeigt, daß in einem solchen modenselektiven Resonator nicht nur der Mode höchster Güte mit merklicher Leistung erregt wird, sondern daß durch spek-

tral selektive Prozesse⁴⁻⁶ eine Koexistenz von vielen Moden möglich ist.

In Kugeln⁷, Ringen^{8,9}, Quadern oder anderen Körpern mit polierten Oberflächen¹⁰ kann im Inneren entstehendes Licht durch Totalreflektion gefangen werden. Die Güte solcher Resonatoren ist für eine sehr große Zahl von Moden annähernd gleich. Kleine Unterschiede in der Güte idealer totalreflektierender Resonatoren für verschiedene Moden werden bei realen Lasern durch Verluste im Inneren der Materialien, wie z. B. durch die starken Streuverluste von Rubin¹¹, ausgeglichen. Es ist daher damit zu rechnen, daß ein merklicher Bruchteil aller Moden an der Lichtlawine der stimulierten Emission teilnimmt. Eine Kondensation in einzelne Moden wird

* Auszugsweise vorgetragen auf der Frühjahrstagung der Physikalischen Gesellschaft Württemberg/Pfalz in Karlsruhe, März 1964.

¹ A. G. FOX u. TINGYE LI, Bell Syst. Techn. J. **40**, 453 [1961].

² G. D. BOYD u. J. P. GORDON, Bell Syst. Techn. J. **40**, 480 [1961].

³ W. G. WAGNER u. G. BIRNBAUM, J. Appl. Phys. **32**, 1185 [1961].

⁴ W. R. BENNET, Phys. Rev. **126**, 580 [1962].

⁵ H. HAKEN u. H. SAUERMAN, Z. Phys. **173**, 261 [1963].

⁶ C. L. TANG, H. STATZ u. G. DE MARS, J. Appl. Phys. **34**, 2289 [1963].

⁷ C. G. B. GARRET, W. KAISER u. W. L. BOND, Phys. Rev. **124**, 1807 [1961].

⁸ D. RÖSS, Proc. IEEE **51**, 468 [1963].

⁹ P. WALSH u. G. KEMENY, J. Appl. Phys. **34**, 956 [1963].

¹⁰ D. RÖSS, Vortrag auf der Frühjahrstagung der Physikalischen Gesellschaft in Bayern, Erlangen, März 1963.

¹¹ W. KAISER u. M. J. KECK, J. Appl. Phys. **33**, 762 [1962].



Dieses Werk wurde im Jahr 2013 vom Verlag Zeitschrift für Naturforschung in Zusammenarbeit mit der Max-Planck-Gesellschaft zur Förderung der Wissenschaften e.V. digitalisiert und unter folgender Lizenz veröffentlicht: Creative Commons Namensnennung-Keine Bearbeitung 3.0 Deutschland Lizenz.

Zum 01.01.2015 ist eine Anpassung der Lizenzbedingungen (Entfall der Creative Commons Lizenzbedingung „Keine Bearbeitung“) beabsichtigt, um eine Nachnutzung auch im Rahmen zukünftiger wissenschaftlicher Nutzungsformen zu ermöglichen.

This work has been digitalized and published in 2013 by Verlag Zeitschrift für Naturforschung in cooperation with the Max Planck Society for the Advancement of Science under a Creative Commons Attribution-NoDerivs 3.0 Germany License.

On 01.01.2015 it is planned to change the License Conditions (the removal of the Creative Commons License condition "no derivative works"). This is to allow reuse in the area of future scientific usage.

erst bei Einführung zusätzlicher Verluste für die übrigen Moden wahrscheinlich.

Das Einschwingverhalten von Laser-Oszillatoren kann durch die bekannten Bilanzgleichungen beschrieben werden^{12, 13}. Bei ihrer Diskussion wird im allgemeinen der Einfluß der spontanen Emission vernachlässigt. Lediglich zum Start der Lichtlawine wird ein spontan emittiertes Quant benötigt. Diese Näherung ist zulässig, wenn nur wenige Moden des Resonators eine hohe Güte haben und wenn die Quantenzahl der stimulierten Emission pro Mode groß ist. Die lineare Näherung der Bilanzgleichung liefert in diesem Fall in Übereinstimmung mit der Beobachtung¹⁴ gedämpfte periodische Relaxationsschwingungen, deren Dämpfung mit der Wurzel aus der Pumprate zunimmt.

In ausgesprochenen Multimode-Lasern, wie in total reflektierenden Ringen, wird dagegen die spontane Emission pro Mode bei den erreichbaren Pump-raten nie vernachlässigbar klein gegen die induzierte Emission pro Mode. Die dauernde Nachlieferung von spontaner Emission in die Moden hoher Güte und ihre anschließende Verstärkung durch stimulierte Emission bewirkt einen gegenüber dem Einmoden-Resonator verstärkten Abbau der Inversion und damit eine schnellere Dämpfung der Relaxationsschwingungen. Das Einschwingverhalten wird eine Funktion der Zahl der Moden hoher Güte.

Bei sehr niedriger Pumprate ist auch in Einmode-Lasern die spontane Emission nicht vernachlässigbar gegen die stimulierte Emission; es läßt sich zeigen, daß auch in diesem Fall die spontane Emission einen wesentlichen Einfluß auf das Einschwingverhalten hat.

Wir wollen das Einschwingverhalten durch die bekannten einfachen Bilanzgleichungen^{12, 13} beschreiben und sie dabei für Multimode-Laser formulieren. Das bedeutet eine starke Vereinfachung des Problems, da Wechselwirkungen zwischen Moden, die Variation des Modenspektrums während des Einschwingvorganges usw. vernachlässigt werden.

II. Bilanzgleichung für Resonatoren mit hoher Modenzahl

Wir rechnen mit einem Resonator hoher Güte. In der Schreibweise von DUNSMUIR¹³ setzen wir die

Schwingungsgleichung für das Drei-Niveau-System vom Rubin vereinfacht an. Wie Kontrollrechnungen zeigten, sind in den gewählten Beispielen die Unterschiede gegenüber einer genaueren Formulierung¹⁵ vernachlässigbar klein. Wir bezeichnen mit q die Gesamtzahl der Quanten aller aktiven Moden im Resonator, mit t_c die Verweilzeit der Quanten im Resonator, gemittelt über alle Moden. $D < 1$ sei der Bruchteil der aktiven Moden des Resonators; n ist die Inversion, W_{exp} die experimentelle Pumprate, B der EINSTEIN-Koeffizient, N_0 die Zahl der aktiven Atome im Resonator. In Analogie zu¹³ formulieren wir:

$$\frac{dn}{dt} = W - 2 B n q, \quad (1)$$

$$\frac{dq}{dt} = B n q - \frac{q}{t_c} + D \frac{N_0}{2 \tau}. \quad (2)$$

Zur Erhöhung der Übersichtlichkeit haben wir den Fluoreszenzverlust der Inversion, den wir näherungsweise mit N_0/τ ansetzen, bereits in der Definition der Pumprate W berücksichtigt. Der Zusammenhang mit der experimentellen Pumprate ist gegeben durch

$$W = W_{\text{exp}} - N_0/\tau. \quad (3)$$

In unserer Schreibweise ist bei Gleichbesetzung der Niveaus die Pumprate W gleich Null.

Beim Einmoden-Laser ergeben sich unter Vernachlässigung der Fluoreszenz in Gl. (2) in bekannter Weise mit $dn/dt = dq/dt = 0$ die Gleichgewichtswerte:

$$n_0 = 1/B t_c, \quad q_0 = W t_c/2. \quad (4, 5)$$

Der Gleichgewichtswert n_0 ist gleichzeitig der Schwellwert der freien Laser-Schwingung. Sobald $n > n_0$ ist, wächst die Quantenzahl im Resonator auch ohne Nachlieferung von spontan emittierten Quanten an. Als Anfangsbedingung muß sich bei Überschreiten der Schwellinversion ein Quant im Resonator befinden. In linearer Näherung ergibt sich weiter beim Einmoden-Resonator unter Vernachlässigung der Fluoreszenz für die Relaxationszeit T und die Dämpfungszeit¹³ t_0 :

$$T = \frac{2 \pi}{\sqrt{W B}}, \quad t_0 = \frac{2}{W B t_c}, \quad t_c = \frac{1}{2 \pi^2} \frac{T^2}{t_0}. \quad (6, 7, 8)$$

In einem ausgesprochenen Multimode-Laser ist das Fluoreszenzglied in Gl. (2) nicht mehr vernach-

¹² H. STATZ u. G. DE MARS, „Transients and Oscillation Pulses in Masers“, in Quantum Electronics, Herausgeber C. H. TOWNES, Columbia University Press 1960, S. 530–537.

¹³ R. DUNSMUIR, J. Electron. Control **10**, 453 [1961].

¹⁴ K. GÜRS, Z. Angew. Phys. **17**, 1 [1964].

¹⁵ K. GÜRS, Z. Naturforsch. **17 a**, 990 [1962].

lässigbar klein. Aus Gl. (1) und (2) folgt unter Berücksichtigung des Fluoreszenzbeitrags für die veränderten Gleichgewichtswerte n_{00} , q_{00} mit $dn/dt = dq/dt = 0$:

$$n_{00} = n_0 \left(1 + \frac{D N_0 / \tau}{W} \right)^{-1} < n_0, \quad (9)$$

$$q_{00} = q_0 \left(1 + \frac{D N_0 / \tau}{W} \right) > q_0. \quad (10)$$

Der Gleichgewichtswert der Inversion n_{00} liegt nach Gl. (9) unter dem Schwellwert der „freien“ Laserschwingung. Außerdem zeigt sich, daß der Gleichgewichtswert eine Funktion der Pumprate und über den Faktor N_0/τ auch der Dotierung des Kristalls ist. Durch den Einfluß der spontanen Emission steigt die Quantenzahl im Resonator bereits vom Inversionspunkt $n \geq 0$ ab unter Verstärkung durch stimulierte Emission merklich an; im Einmoden-Laser ist der Anstieg dagegen erst beim Überschreiten der Schwelle der freien Schwingung $n \geq n_0$ merklich. Der Gleichgewichtswert der Quantenzahl wird in dem Multimode-Laser durch dauernden Nachschub von spontaner Emission aufrechterhalten.

III. Numerische Berechnung des Einschwingverhaltens

Solange der Bruchteil der Moden hoher Güte $D \ll 1$ ist, unterscheiden sich die Gleichgewichtswerte der Inversion und der Quantenzahl nur sehr geringfügig von denen des vereinfachten Einmoden-Lasers. Die Berechnung des Einschwingverhaltens zeigt jedoch, daß bereits geringe Abweichungen zu einem wesentlich veränderten Relaxationsverhalten führen. Wir haben Gl. (1) und (2) numerisch mit der Datenverarbeitungsanlage 2002 untersucht. Da uns vor allem das Schwingungsverhalten unter Voraussetzungen interessierte, die eine schnelle Dämpfung der Relaxationsschwingung erwarten ließen, haben wir Parameter gewählt, die einem Rubin-Laser hoher Resonatorgüte bei hoher Pumpleistung entsprechen:

$$\begin{aligned} B &= 1,49 \cdot 10^{-9} \text{ s}^{-1}, \\ W &= 6,7 \cdot 10^{22} \text{ s}^{-1}, \\ t_c &= 7,9 \cdot 10^{-9} \text{ s}. \end{aligned} \quad (11)$$

Daraus ergeben sich in der Näherung für Einmoden-Laser die Werte:

$$\begin{aligned} n_0 &= 8,9 \cdot 10^{16}, & q_0 &= 2,65 \cdot 10^{14}, \\ T &= 0,67 \text{ } \mu\text{s}, & t_0 &= 2,6 \text{ } \mu\text{s}. \end{aligned} \quad (12)$$

Die in der Praxis bei Rubin-Lasern beobachteten Werte für die Relaxationsperiode liegen merklich höher, so daß das für das Relaxationsverhalten bestimmende Produkt WB nur in Ausnahmefällen den angenommenen Wert erreichen wird. Die numerischen Werte unserer Rechnung lassen sich auf andere Größen von WB durch eine Zeittransformation umwandeln, wobei zu beachten ist, daß niedrigeren Werten von WB ein höherer Wert von t_c zuzuordnen ist.

a) Einschwingverhalten des vereinfachten Einmoden-Lasers

Für die Untersuchung des vereinfachten Einmoden-Lasers wurde $D = 0$ gesetzt und die Anfangsbedingung wie folgt festgelegt:

$$\text{für } t=0 \text{ ist } n=n_0 \text{ und } q=1. \quad (13)$$

In Abb. 1 ist die Lösung für einen Zeitraum von $10 \text{ } \mu\text{s}$ aufgetragen. Der Verlauf des Einschwingvor-

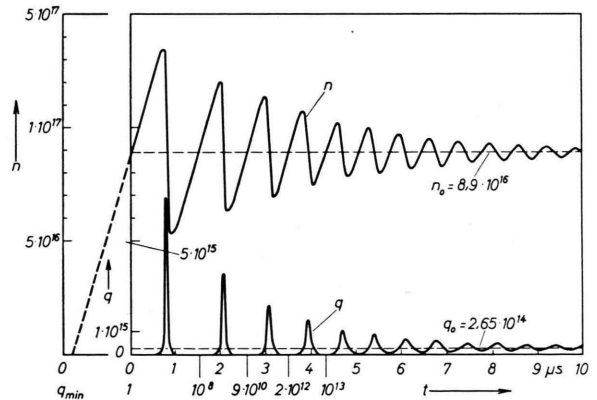


Abb. 1. Einschwingverhalten des Einmoden-Lasers. q_{\min} = minimale Quantenzahl zwischen den Relaxationsimpulsen.

ganges ist ähnlich, wie er bereits früher von anderen Autoren ^{2, 3} unter diesen Voraussetzungen berechnet wurde. Die Inversion pendelt zunächst in sägezahnförmigen Ausschlägen um den Gleichgewichtswert; mit wachsender Zeit werden die Abweichungen kleiner, und die Kurve wird sinusförmig. In der Kurve für die Quantenzahl bilden sich zunächst fünf Einzelimpulse aus, zwischen denen die Quantenzahl auf vergleichsweise unbeobachtbar niedrige Werte absinkt; dann pendelt auch diese Kurve gedämpft sinusförmig um den Gleichgewichtswert. In Abb. 2 sind die Abweichungen der Extremwerte der Quantenzahl vom Gleichgewichtswert n_0 in logarithmischem Maßstab aufgetragen. Die Spitzenwerte der

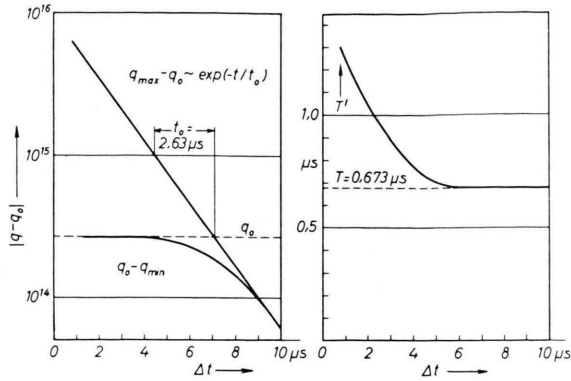


Abb. 2. Zeitabhängigkeit der Relaxationsamplitude und der Relaxationsperiode beim Einmoden-Laser.

Quantenzahl fallen bemerkenswerterweise von Anfang an mit t_0 ab. Die Minimalwerte von q steigen dagegen langsam an, ihre Einhüllende folgt erst am Ende der Meßzeit einem exponentiellen Abfall mit der Zeitkonstante t_0 . Die Relaxationsperiode ist während der ersten Einzelimpulse wesentlich größer als T ; etwa nach der halben Meßzeit klingt der Impulsabstand auf T ab.

Die numerische Rechnung zeigt insbesondere, daß im Einmoden-Laser die Relaxationsschwingung auch bei sehr hoher Resonatorgüte und hoher Pumprate mit einigen Einzelimpulsen eingeleitet wird. Der Abfall der Maximalwerte von q erfolgt von Anfang an exponentiell mit der Zeitkonstanten t_0 . Im übrigen gelten die Ergebnisse der linearen Näherung erst am Ende unserer Zeitskala, wenn die Ausschläge der Inversion und der Quantenzahl klein gegen die Gleichgewichtswerte sind.

b) Multimode-Laser geringer Modenselektion

Wir haben als nächsten Schritt das Einschwingverhalten eines Multimode-Lasers mit sehr geringer Modenselektion berechnet. In Abb. 3 sind die Lö-

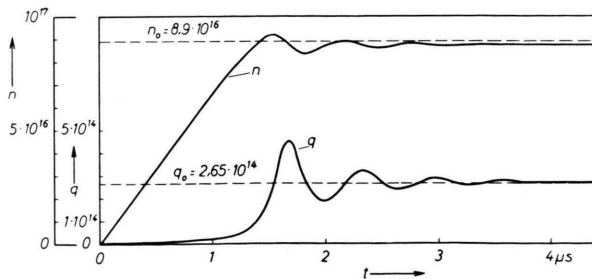


Abb. 3. Einschwingverhalten bei einer großen Zahl aktiver Moden. (Der Zeitmaßstab ist im Vergleich zu Abb. 1 um einen Faktor 2 gedehnt.)

sungen der vollständigen Gln. (1) und (2) mit $D = 4 \cdot 10^{18}/N_0$ aufgezeichnet. Bei einem angenommenen Resonatorvolumen von 1 cm^3 und einer Dotierung von $2 \cdot 10^{19}$ Chromionen pro cm^3 ergibt dies $D = 0.2$; 20% aller Moden sollen also eine vergleichbar hohe Güte besitzen.

Nach Abb. 3 erreicht die Inversion nur im ersten Maximum den Schwellwert der freien Schwingung und bleibt dann stets unter diesem Wert. Die Quantenzahl q steigt sehr allmählich an; sie hat bei $n = n_0$ bereits ein Viertel des Maximalwertes erreicht (in Abb. 1 beträgt der entsprechende Wert 10^{-15}). Die Schwingung ist stark gedämpft, und zwar ist die Dämpfungszeit ϑ erheblich kürzer als t_0 . Sowohl für die Minima als auch für die Maxima der Quantenzahl ergibt sich jetzt, wie die Auswertung zeigt, von Anfang an eine exponentielle Dämpfung mit den gleichen Zeitkonstanten $\vartheta = 0.6 \mu\text{s}$, die etwa 5-mal kleiner ist als t_0 .

Die Relaxationsschwingungen des Multimode-Resonators sind stärker gedämpft als die des Einmoden-Resonators. Die Ursache dafür liegt in dem zusätzlichen Abbau der Inversion durch die Verstärkung der spontanen Emission.

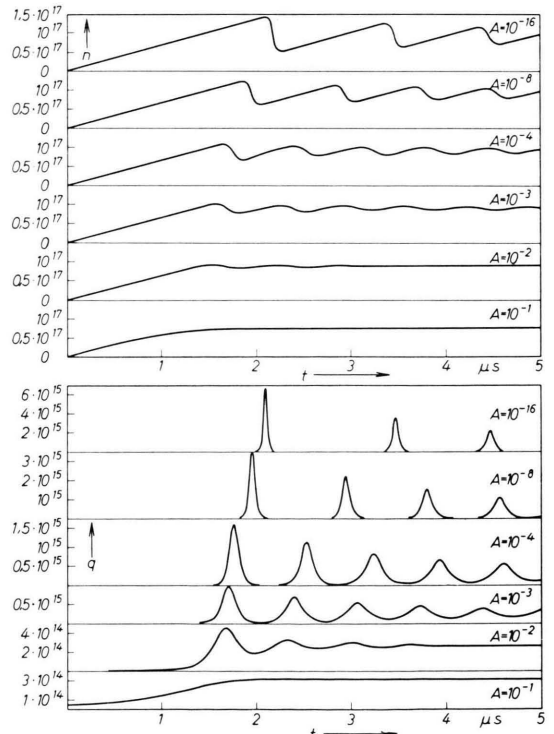


Abb. 4. Einschwingverhalten in Abhängigkeit von der Modenzahl. a) Inversion n , b) Quantenzahl q , $A = D N_0 / W \tau$; $W = 6.7 \cdot 10^{22} \text{ s}^{-1}$, $t_c = 7.9 \cdot 10^{-9} \text{ s}$, $n_0 = 8.9 \cdot 10^{16}$, $q_0 = 2.65 \cdot 10^{14}$.

In Abb. 4 sind Lösungen der Schwingungsgleichung für verschiedene Modenselektionen aufgezeichnet. Der Parameter D variiert dabei so, daß alle Fälle zwischen einem Laser mit einem Mode und einem Laser, bei dem fast alle Moden hohe Güte haben, erfaßt werden. Der Kurvenverlauf der Quantenzahl zeigt eine wachsende Dämpfung der Relaxationsschwingung mit größer werdender aktiver Modenzahl. Bei sehr geringer Modenselektion tritt kein Überschwingen mehr auf; die Quantenzahl nähert sich aperiodisch dem Gleichgewichtswert, der hier merklich größer als q_0 ist. Der Fall hoher Modenselektion ist identisch mit dem des vereinfachten Einmode-Lasers. Im Kurvenverlauf für die Inversion fällt auf, daß bei sehr geringer Modenselektion die Inversion die Schwelle der freien Schwingung zu keinem Zeitpunkt mehr erreicht. Daß in ausgesprochenen Multimode-Lasern der Gleichgewichtswert der Inversion merklich unter dem Schwellwert der freien Schwingung liegt, dürfte ein wesentlicher Grund dafür sein, daß in solchen Resonatoren im Gegensatz zu Resonatoren mit hoher Modenselektion äußerst stabile Relaxationsschwingungen beobachtet werden.

In Abb. 5 ist der Dämpfungsverlauf der Maximal-

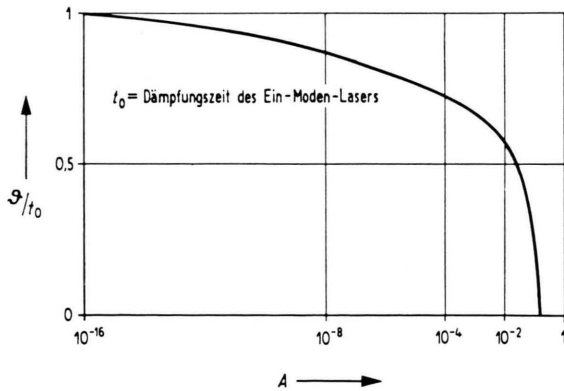


Abb. 5. Dämpfungszeit in Abhängigkeit von der Modenzahl (numerisch berechnet). $A = D N_0 / W \tau$; $W = \text{const} = 6,7 \cdot 10^{22} \text{ s}^{-1}$.

$$\vartheta = \frac{2}{B W t_c + B D t_c \frac{N_0}{\tau} + \frac{1}{t_c} \frac{D N_0}{\tau} \frac{1}{W + D N_0 / \tau}} < t_0, \quad (19)$$

$$T' = \frac{2 \pi}{\sqrt{W B \left(1 - \frac{D N_0}{2 \tau} \cdot \frac{1}{W}\right) - \left(\frac{W B t_c}{2}\right)^2 \left(1 + \frac{D N_0}{\tau W}\right)^2 - \frac{1}{4 t_c^2} \left(\frac{1}{1 + W / (D N_0 / \tau)}\right)^2}}. \quad (20)$$

Die Auswertung von Gl. (20) (Abb. 6 a) zeigt, daß bei hoher Pumprate die Relaxationsperiode wie $1/\sqrt{W}$ abfällt. Unterhalb einer für die Modenzahl

werte von q in Abhängigkeit von der Modenselektion aufgetragen. ϑ nimmt mit wachsender Modenzahl stark ab; bereits bei relativ hoher Modenselektion ist ϑ merklich kleiner als t_0 .

IV. Analytische Näherungslösung für das Einschwingverhalten

Das Einschwingverhalten des Multimode-Lasers läßt sich in linearer Näherung berechnen, wenn man als Mittelwerte die gegenüber den früheren Ansätzen veränderten Gleichgewichtswerte n_{00} und q_{00} benutzt. Wir setzen:

$$\begin{aligned} n &= n_{00} + \eta; & \eta &\ll n_{00}, \\ q &= q_{00} + \varepsilon; & \varepsilon &\ll q_{00}. \end{aligned} \quad (14)$$

In der linearen Näherung ergibt sich aus Gl. (1) und (2) das Differentialgleichungspaar:

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \eta}{dt^2} &= 2 B n_{00} \frac{d\varepsilon}{dt} - 2 B q_{00} \frac{d\eta}{dt}, \\ \frac{d^2 \varepsilon}{dt^2} &= B q_{00} \frac{d\eta}{dt} - B (n_0 - n_{00}) \frac{d\varepsilon}{dt}. \end{aligned} \quad (15)$$

Mit dem harmonischen Lösungsansatz:

$$\begin{aligned} \eta &= \eta_0 e^{i \omega t}, \\ \varepsilon &= \varepsilon_0 e^{i \omega t + i \varphi}, \end{aligned} \quad (16)$$

ergibt sich die charakteristische Gleichung:

$$\omega^2 - i \omega [2 B q_{00} + B (n_0 - n_{00})] - 2 B^2 n_{00} q_{00} = 0. \quad (17)$$

Die Lösung ist:

$$\begin{aligned} \omega &= i [B q_{00} + \frac{1}{2} B (n_0 - n_{00})] \\ &\quad \pm \sqrt{2 B^2 n_{00} q_{00} - [B q_{00} + \frac{1}{2} (n_0 - n_{00})]^2}, \\ \omega &= i/\vartheta + 2 \pi/T'. \end{aligned} \quad (18)$$

Die Lösungen sind gedämpfte periodische Schwingungen um die Gleichgewichtswerte mit der Schwingungsperiode T' und der Dämpfungszeit ϑ . Nach einfachen Umrechnungen erhält man für ϑ und T' :

charakteristischen Pumprate wächst sie mit sinkender Pumprate stark an und divergiert schließlich, es tritt kein Überschwingen mehr auf.

Interessanter ist die Auswertung von Gl. (19) für die Dämpfungszeit. Sie ist nunmehr abhängig von der aktiven Modenzahl sowie von der Dotierung und ist in jedem Fall kleiner als t_0 [vgl. Gl. (11)]. Im Nenner von Gl. (19) stehen Glieder, die proportional der Resonatorverweilzeit und der Pumprate sind, neben Gliedern, die umgekehrt proportional zu diesen Größen sind. Die Abhängigkeit der Dämpfungszeit von diesen Parametern ist daher im Multimode-Laser nicht mehr einfach monoton. Die Differenzierung nach der Pumprate liefert:

$$\frac{d\vartheta}{dW} = \frac{-2 \left[B t_c - \frac{1}{t_c} \frac{D N_0}{\tau} \cdot \frac{1}{(W + D N_0/\tau)^2} \right]}{[\text{Nenner}]^2}. \quad (21)$$

Im Gegensatz zum vereinfachten Einmoden-Laser ($D \rightarrow 0$) kann die Dämpfungszeit mit wachsender Pumprate je nach der Zahl der aktiven Moden zu- oder abnehmen. Es ist

$$\left. \begin{array}{l} \frac{d\vartheta}{dW} < 0 \\ \frac{d\vartheta}{dW} > 0 \end{array} \right\} \text{ für } \left\{ \begin{array}{l} B t_c > \\ B t_c < \end{array} \right\} \frac{1}{t_c} \frac{D N_0}{\tau} \cdot \frac{1}{(W + D N_0/\tau)^2}. \quad (22)$$

Das Maximum der Dämpfungszeit liegt bei

$$\frac{d\vartheta}{dW} = 0 \text{ für } W = \sqrt{\frac{D N_0}{\tau} \cdot \frac{n_0}{t_c}} - \frac{D N_0}{\tau}. \quad (23)$$

Bei kleineren Pumpleistungen wächst die Dämpfungszeit mit der Pumprate an, für größere fällt sie ab. Die maximale Dämpfungszeit ergibt sich mit einfachen Umrechnungen zu

$$\vartheta_{\max} = (B D N_0/\tau)^{-1/2} < t_0. \quad (24)$$

Für die Abhängigkeit der Dämpfungszeit von der Resonatorverweilzeit t_c ergibt sich entsprechend:

$$\frac{d\vartheta}{dt_c} = \frac{-2 \left(B W + B D \frac{N_0}{\tau} - \frac{1}{t_c^2} \frac{D N_0}{\tau} \frac{1}{W + D N_0/\tau} \right)}{[\text{Nenner}]^2}.$$

Je nach der Modenzahl kann die Dämpfungszeit mit wachsender Resonatorverweilzeit zu- oder abnehmen.

In Abb. 6 b ist die Abhängigkeit der Dämpfungszeit von der Pumprate für verschiedene Modenselektionen nach der linearen Näherung aufgezeichnet. Für niedrige Pumpraten ergibt die Näherung zu große Werte für die Dämpfungszeit. (Hier wird $\vartheta \approx T'$.)

Auch beim Einmode-Laser macht sich der Einfluß der spontanen Emission bemerkbar, wenn die Pumprate sehr niedrig ist. In diesem Fall ist die spontane

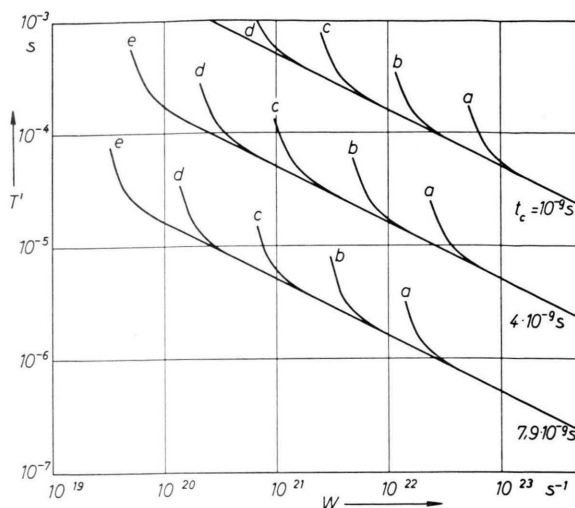


Abb. 6 a.

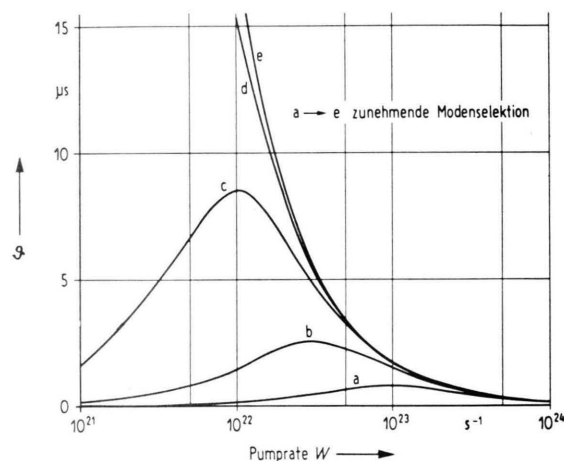


Abb. 6 b.

Abb. 6. Abhängigkeit der Relaxationsparameter von der Pumprate beim Multimode-Laser. a) Relaxationsperiode für 3 verschiedene Resonatorverweilzeiten. b) Dämpfungszeit für $t_c = 7,9 \cdot 10^{-9}$ s.

Kurve	a	b	c	d	e
$D N_0/\tau$	10^{21}	10^{20}	10^{19}	10^{18}	10^{17} s^{-1}

Emission pro Mode ebenfalls nicht vernachlässigbar neben der induzierten Emission pro Mode. Unsere Näherungsformeln sind auch auf diesen Fall anwendbar und zeigen, daß in der Nähe der Schwellpumprate die Dämpfungszeit sehr viel kürzer sein kann, als sich aus der vereinfachten Näherung ergibt (siehe auch ¹⁶).

¹⁶ M. BIRNBAUM, T. STOCKER u. S. J. WELLES, Proc. IEEE **51**, 854 [1963].

V. Vergleich mit experimentellen Beobachtungen

Wir hatten zunächst versucht, das stark gedämpfte Einschwingverhalten totalreflektierender Laser, wie es in Abb. 7 für Rubin-Torus-Laser dargestellt ist, durch eine besonders hohe Güte dieser Resonator-

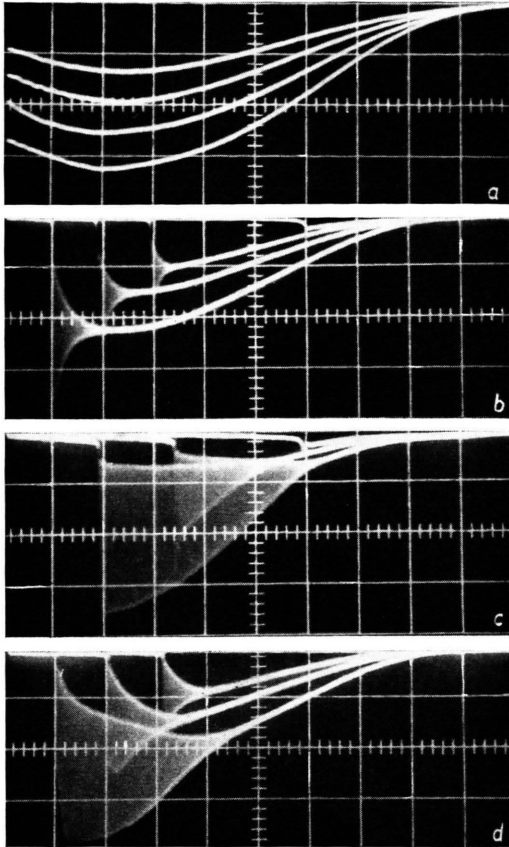


Abb. 7. Emission verschiedener Rubin-Torus-Laser. 20 °C; 50 μ s/cm, 150 μ s gegen den Einsatz der Blitzlampe verzögert; Pumpenergie jeweils 181, 274, 385, 600 Ws; Ordinenrichtung negativ.

- a) Pumplicht (5500 Å).
- b) Torus 8×12×2,5 mm; 0,035% Cr³⁺; 0°.
- c) Torus 8×12×2,5 mm; 0,035% Cr³⁺; 90°.
- d) Torus 11×12×2,5 mm; 0,035% Cr³⁺; 0°.

form zu erklären⁸. Es ist tatsächlich möglich, Güten zu erreichen, die wesentlich über denen von Spiegelresonatoren liegen. Als Beweis dafür sehen wir z. B. an, daß wir an einem extrem schwach dotierten Rubin-Ring mit 0,006% Cr³⁺ noch bei 80 °C die gleiche Schwellenergie beobachteten wie an einem

normal-dotierten Kristall. FABRY-PÉROT-Laser dieser Dotierung funktionieren dagegen wegen der höheren Verluste erst bei Kühlung auf ca. -100 °C, wo die Verstärkung pro Durchgang infolge der geringeren thermischen Linienverbreiterung wesentlich höher ist als bei Zimmertemperatur und darüber.

Andererseits beobachteten wir, daß schlecht polierte Ringe bei Kühlung auf -40 °C aperiodisch einschwingen, bei höherer Temperatur jedoch nicht zur Funktion gebracht werden konnten. Nach den bekannten Vorstellungen ließ der aperiodische Einschwingvorgang bei tiefer Temperatur auf hohe Resonatorgüte schließen; dem widersprach jedoch die Nichtfunktion bei Zimmertemperatur. Weiter zeigte sich, daß eine Verbesserung der Oberflächenpolitur, also der Resonatorgüte, zu einer Verlängerung der Einschwingzeit führt, während gerade das Gegenteil erwartet wurde. Völlig unverständlich war ferner die auch von anderen beobachtete Erscheinung, daß mit wachsender Pumpleistung die Einschwingzeit länger statt, wie erwartet, kürzer wird^{9, 17}. Ein Beispiel für dieses Verhalten ist in Abb. 8 dargestellt (eine ausführliche Veröffentlichung unserer experimentellen Beobachtungen an verschiedenen totalreflektierenden Resonatoren bereiten wir zur Zeit vor).

Die zunächst widersprüchlichen Beobachtungen lassen sich einheitlich durch die Annahme erklären, daß in diesen Resonatoren ein nicht verschwindend kleiner Bruchteil aller Moden an der Lichtlawine der stimulierten Emission teilnimmt. Die beobachteten Effekte entsprechen dann ganz dem Ergebnis unserer Rechnungen. In Abb. 9 a ist die Emission eines Ringes aufgezeichnet, die durch geeignete Wahl der Betriebsbedingungen der Kurvenform unseres numerischen Beispiels vollständig entspricht. Auffallend ist insbesondere im Gegensatz zur Emission von Rubin-Lasern hoher Modenselektion der langsame Anstieg am Einsatz der Lichtlawine.

Durch FABRY-PÉROT-Aufnahmen konnten wir inzwischen zeigen, daß sich die Emission von Ring- und Kubus-Lasern über ein breites, kontinuierliches Frequenzband erstreckt¹⁸. Die Multimode-Eigenschaft dieser Resonatoren wurde damit direkt nachgewiesen.

Bei konfokalen Rubin-Lasern haben wir eine Emission in einem breiten Frequenzband bei hoher

¹⁷ H. HANTSCHKE u. D. RÖSS, Z. Naturforschg. **18 a**, 1020 [1963].

¹⁸ G. GEHRER u. D. RÖSS, Vortrag auf der Frühjahrstagung der Physikalischen Gesellschaft Württemberg-Pfalz, Karlsruhe, März 1964.

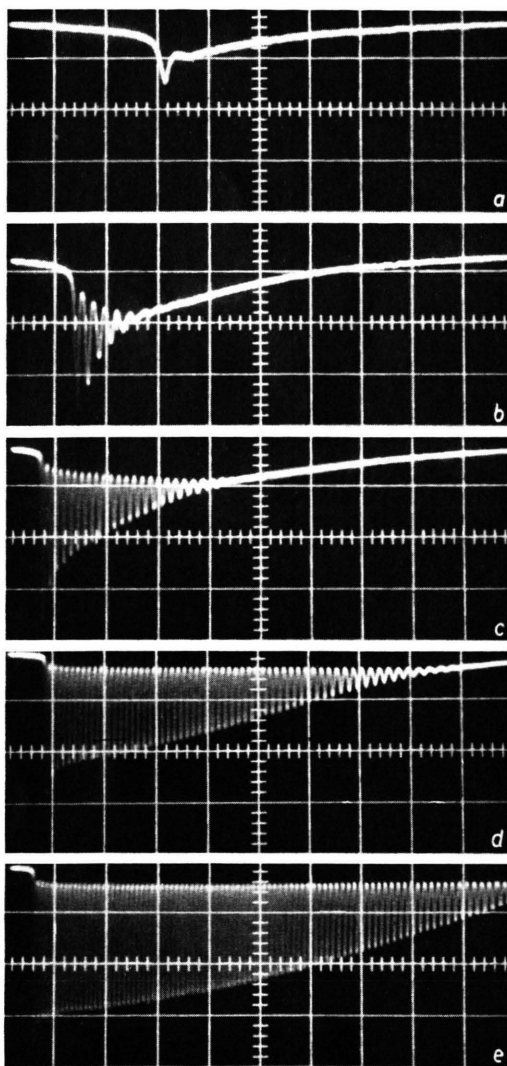


Abb. 8. Torus-Laser, Abhängigkeit des Einschwingverhaltens von der Pumpenergie.

Bild	a	b	c	d	e
Pumpenergie [Ws]	182	196	225	308	400
Amplitude	×1	×1	×2,5	×5	×5
Verzögerung [μ s]	383	378	332	275	242

10 μ s/cm; Pumpe wie in Abb. 7.

Pumpenergie gefunden. Sie ist verbunden mit einer quasikontinuierlichen Emission¹⁹. Wir vermuten, daß auch hier die starke Dämpfung der Relaxations-

schwingungen nicht Folge einer hohen Resonatorgüte, sondern des beschriebenen Multimode-Effektes ist (Abb. 9 b).

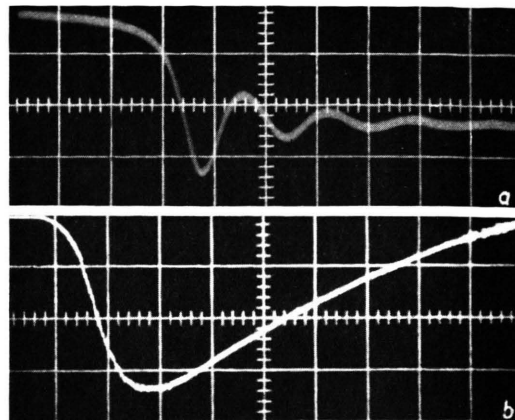


Abb. 9. Emission von Multimode-Lasern. a) Torus-Laser, 2 μ s/cm. b) Konfokaler Rubin-Laser mit Metallsiegeln von 85% Reflexion. 100 μ s/cm; 600 μ s verzögert; 300 Ws. Das Oszillogramm zeigt bei Zimmertemperatur die kontinuierliche Emission im Nahfeld außerhalb der Resonatorachse¹⁹.

Nahe an der Schwelle fanden wir in der Emission ebener FABRY-PÉROT-Laser mit dielektrischen Spiegeln sowie in der Emission von Lasern hoher Modenselektion mit Etalon-Reflektor²⁰ stark gedämpfte Relaxationsschwingungen²¹. Die Dämpfungszeit war nach Gl. (8) für die gegebene Resonatorgüte zu kurz. Diese Beobachtung läßt sich nach unseren Ansätzen unter der plausiblen Annahme verstehen, daß die Pumprate nur verschwindend über der Schwellpumprate lag.

Unser Ansatz beschreibt ferner die quasikontinuierliche Emission von einseitig offenen Lasern, in denen ohne Rückkopplung bei genügender Verstärkung eine leistungsstarke, räumlich inkohärente, gerichtete Superstrahlung auftritt²².

Von E. SNITZER („Neodym Glass Laser“ in Proc. Conf. on Quantum Electronics Paris 1963, Columbia University Press, New York 1964, S. 999) wurde beobachtet, daß in Glas-Neodym-Lasern mit FABRY-PÉROT-Resonator eine in einigen Fällen auftretende quasikontinuierliche Emission mit breiten spektralen Bändern und einer geringen Strahlbündelung, also mit Multimode-Anregung gekoppelt ist. Bei Lasern mit hoher Modenselektion, also mit scharfer Strahlbündelung und mit einer Emission in scharfe Linien, erfolgt die Emission zeitlich ungedämpft. Diese Beobachtungen lassen sich zwanglos mit unseren Überlegungen über

¹⁹ G. GEHRER, W. HEINLEIN u. D. RÖSS, Vortrag auf der Frühjahrstagung der Physikalischen Gesellschaft in Bayern, München, April 1964.

²⁰ D. Röss, Proc. IEEE **52**, 196 [1964].

²¹ D. Röss, Z. Naturforsch. **19 a**, 387 [1964].

²² D. Röss, Proc. IEEE **52**, 853 [1964].

den Einfluß der aktiven Modenzahl auf das Einschwingverhalten verstehen. Bei Rubin mit FABRY-PÉROT-Geometrie beobachtet man in keinem Fall (ausgenommen bei ganz schlechter Kristallqualität) eine Multimode-Anregung ohne Strahlbündelung. Der Grund für das unterschiedliche Verhalten liegt darin, daß die stets vorliegende schwächere Anregung der Randzonen in einem Rundstab bei dem Drei-Niveaumaterial Rubin zu einer starken axialen Modenselektion führt, während in dem Vier-Niveaumaterial die schwächer gepumpten Randzonen keine Absorption der Laserstrahlung und damit keine erhebliche Modenselektion aufweisen.

Anhang

Zwei mögliche Ursachen für das Auftreten ungedämpfter Relaxationsimpulse

Die in der Praxis besonders bei Lasern hoher Modenselektion (FABRY-PÉROT-Laser mit dielektrischen Spiegeln) beobachteten ungedämpften Relaxationsimpulse sind nach den Bilanzgleichungen nicht zu verstehen. Die Emission sollte stets gedämpft sein. Von SHIMODA wurde gezeigt, daß die Absorption der Rubin- R_1 -Linie durch angeregte Chromionen zu einem Enddämpfungsterm in den Bilanzgleichungen führen kann²³. Wir wollen auf zwei weitere Mechanismen hinweisen, die als Ursache für das Auftreten ungedämpfter „spikes“ in Frage kommen.

a) Wir nehmen als Hypothese an, daß beim Überschreiten der Schwellinversion $n = n_0$ kein spontan emittiertes Quant im Mode höchster Güte vorhanden ist. Nach einer Zeit Δt wird ein passendes Quant spontan emittiert. Die Inversion hat jetzt beim Start der Lichtlawine den Wert $n = n_0 + W \Delta t$. Es läßt sich numerisch leicht zeigen, daß mit diesen veränderten Anfangsbedingungen die minimale Quantenzahl q_1 nach dem ersten Relaxationsimpuls niedriger wird als ohne Verzögerung. Bei genügend großer Verzögerung wird $q_1 \leq 1$. Da die Quantenzahl nur ganze Werte annehmen kann, bedeutet dies, daß der zweite Relaxationsimpuls unter der gleichen Anfangsbedingung startet wie der erste; periodische Impulse sind also möglich. Der Effekt geht verloren, wenn man q als kontinuierlich variable Größe betrachtet.

Numerische Rechnungen haben gezeigt, daß mit den für Rubin-Lasern gültigen Parametern $\Delta t = 10^{-7}$ bis $5 \cdot 10^{-7}$ s genügt, um den Zusammenhang zwischen aufeinanderfolgenden Relaxationsimpulsen zu zerstören.

Nun folgt allerdings aus den Bilanzgleichungen, daß sich stets mehrere spontan emittierte Quanten in jedem Mode eines Rubin-Lasers befinden sollten; eine Verzögerung der Lichtlawine ist danach in diesem Fall nicht zu erwarten. Es wäre hier zu untersuchen, wie in einem teilweise offenen Resonator die spontane Emissionswahrscheinlichkeit in Moden hoher Güte gegenüber den übrigen Moden durch „trapping“ herabgesetzt ist, so daß ein „Jitter“ der Lichtlawine möglich ist.

b) Einen weiteren Mechanismus für den Verlust des Gedächtnisses zwischen aufeinanderfolgenden Relaxationsimpulsen sehen wir in der Frequenzänderung der Moden hoher Güte während eines Spikes. Von SHIMODA wurde mit zeitaufgelösten FABRY-PÉROT-Aufnahmen eine lineare Änderung der Modenfrequenz während jedes Spikes in einem periodisch pulsierenden Laser nachgewiesen²³. Diese Frequenzdrift läßt sich aus der Änderung der optischen Resonatorlänge durch die Abhängigkeit des Brechungsindex von der Inversion erklären²⁴, die sich während eines Relaxationsimpulses nach Abb. 1 monoton und linear verändert. Das bedeutet aber, daß die Resonanzfrequenzen des Laser-Resonators zu Beginn des Relaxationsimpulses (hohe Inversion) sich von denen in der Impulsspitze und danach unterscheiden. Als Folge ist für den Start des nächsten Impulses die Anwesenheit von Quanten aus den vorhergehenden Impulsen im Resonator unwesentlich, weil diese zu dem gegebenen Zeitpunkt eine falsche Frequenz besitzen. Damit sind wieder periodische Impulse möglich. Insbesondere würde dieser Effekt auch periodische Relaxationsimpulse in den Fällen erklären, in denen sie einer teilweise kontinuierlichen Strahlung ungedämpft überlagert sind (solche Emissionsformen kann man an einzelnen Torus-Lasern beobachten). Der zweite Effekt kann nicht durch die einfachen Bilanzgleichungen beschrieben werden, da zu seiner Erfassung die Berücksichtigung der Phasen und des Einflusses von optischen Längenänderungen auf die Resonanzfrequenzen des Resonators notwendig ist. Eine Erweiterung der allgemeineren Ansätze von HAKEN und SAUERMAN⁵ sollte eine mathematische Beschreibung ermöglichen.

²³ K. SHIMODA, Proc. Symp. on Optical Masers, New York 1963; Microwave Res. Inst. Symposia Series Vol. XIII, Polytechnic Press, S. 95–108.

²⁴ G. GEHRER, „A possible cause for frequency shifts in Ruby Laser spikes“, Proc. IEEE, in Vorbereitung.